LES NOMBRES COMPLEXES

1. Introduction

Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solutions. En effet $x^2 = -9$ n'a pas de sens dans $\mathbb{R}$.

On va donc, dans ce chapitre "construire" ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 = -9$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des ***nombres complexes***.

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté ***i*** (***i*** comme imaginaire). Le nombre ***i*** est tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. De plus, son opposé ***-i*** a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = i^2 = -1$.

L'équation précédente $x^2 = -9$ possède alors deux solutions : $x^2 = -9$ équivaut à $x^2 = 9\,i^2$ $x = \sqrt{9i^2}$ ou $x = -\sqrt{9i^2}$ donc $x = 3i$ ou $x = -3i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$. Les deux racines carrées de -9 sont les deux nombres réels $3i$ et $-3i$.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des ***nombres complexes***. C'est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Remarque :

$\mathbb{C}$ est un ensemble encore plus grand que tous les autres. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Construction du corps des nombres complexes

On appelle ensemble des **nombres complexes**, l'ensemble noté $\mathbb{C}$ et contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté ***i*** tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{a + ib}$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes régles de calcul.
- Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **les nombres complexes**. Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre ***z***

Définition :

Soit un nombre complexe z. L'écriture $z = a + ib$ où a et b sont des réels, est appelée **l'écriture algébrique** du nombre complexe z. Le réel a est appelé **la partie réelle** de z, et le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Attention **:** La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.

Remarque :

- On utilise parfois l'expression $z = a + jb$ pour les problèmes liés à l'électricité ou à l'électronique afin d'éviter les confusions avec l'intensité du courant

Exemples *:*Dans chacun des exemples suivants, donner la partie réelle et la partie imaginaire :

→ $z = 2 + 3i$	a = …..	b = …..
→ $z = -1 + \frac{1}{2}i$	a = …..	b = …..
→ $z = \pi$	a = …..	b = …..
→ $z = -i$	a = …..	b = …..
→ $z = 4i - \frac{1}{3}$	a = …..	b = …..

- ***Nombres complexes particuliers***

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel

- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est **un imaginaire pur** (on dit parfois simplement imaginaire).

Propriété *:*

Deux complexes sont égaux si et seulement si, ils ont **même partie réelle** et **même partie imaginaire** C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels,

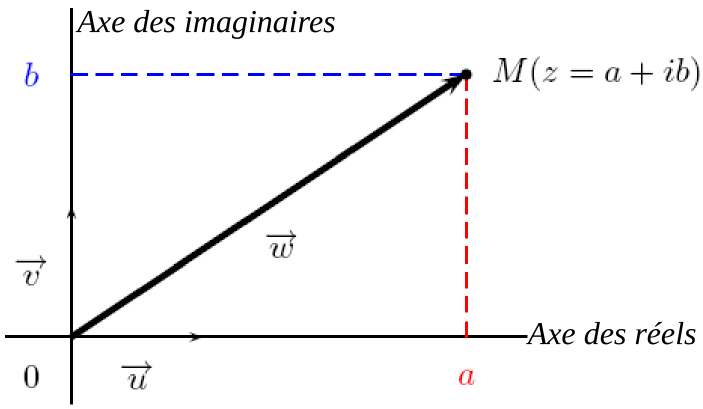
on a : $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

3. *Représentation géométrique des nombres complexes*

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point M de coordonnées (a ; b).



Remarques :

- L'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels.**
- L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires.**
- Les coordonnées (a ; b) du point M sont appelées les coordonnées **cartésiennes** de M.

Définition :

- Le point M (a ; b) s'appelle **l'image** du nombre complexe $z = a + ib$.
- Le nombre complexe $z = a + ib$ s'appelle **l'affixe** du point M (a ; b).

  ("Affixe" est un nom féminin)

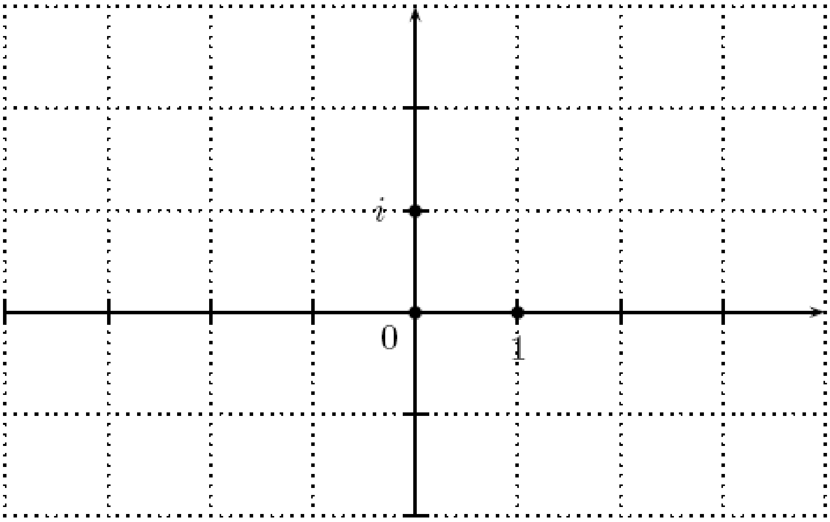
- ***Autre interprétation utilisée :***

Au nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b des réels), on peut associer le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a ; b).
On dit que $z = a + ib$ est l'***affixe*** du vecteur $\vec{w}$ ou que $\vec{w}$ (a ; b) est l'image vectorielle de $z = a + ib$.

Exemples :

Placer dans le plan complexe les points M_i d'affixe z_i :

- $\rightarrow z_1 = 2 + 3i$
- $\rightarrow z_2 = 3 + i$
- $\rightarrow z_3 = -1 + 2i$
- $\rightarrow z_4 = 2 - i$
- $\rightarrow z_5 = i$
- $\rightarrow z_6 = -2i$
- $\rightarrow z_7 = -2$
- $\rightarrow z_8 = -i - 3$



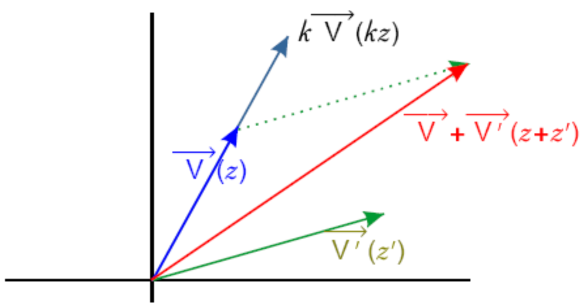
Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors :

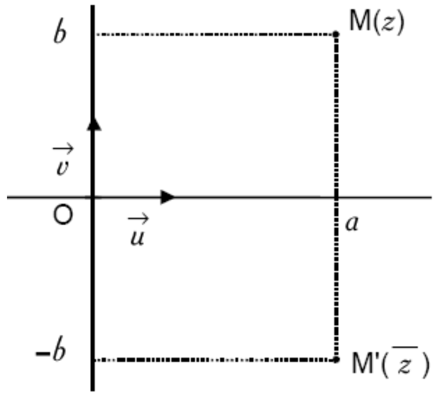
- OM = $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- MM' = $\|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- Le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$

Remarque :

Ces applications permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si et seulement si, ils ont les mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs :



4. *Conjugué d'un nombre complexe*



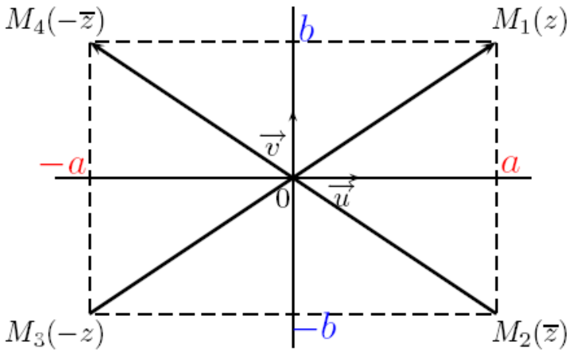
Définition *:*

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$.

On appelle **le conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$

Remarque *:*

Géométriquement, si M_1 est le point d'affixe z, le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est le ………………. de M_1 par rapport à ……………………………..



Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z.\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $z + \overline{z} = 2.\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i.\mathrm{Im}(z)$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Exemples *:*

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$, on a :

- $\overline{z}$ = ………….. $\Rightarrow$ $\overline{\overline{z}}$ = …………..

  $\overline{z'}$ = ………….. $\Rightarrow$ $\overline{\overline{z'}}$ = …………..
- $z.\overline{z} = (3 + 5i).(3 - 5i)$ = ………….. = ………….. = ……..
- $z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i)$ = ………….. $\Rightarrow$ $\overline{z + z'}$ = …………..

  $\overline{z} + \overline{z'} = (3 - 5i) + (-2 - 3i)$ = …………..
- $zz' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i)$ = ……………………….. = ………………….. = ………………

  $\Rightarrow$ $\overline{zz'}$ = …………..

  $\overline{z}.\overline{z'} = (3 - 5i) \times (-2 - 3i)$ = ……………………….. = ………………….. = ………………

Remarque : La propriété $z.\overline{z} \in \mathbb{R}^+$ est utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotient. Par exemples :

$$\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

$$\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i+2i-1}{4-i^2}=\frac{1+3i}{4+1}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i \qquad \frac{2}{i}=\frac{2\times(-i)}{(i)(-i)}=\frac{-2i}{1}=-2i$$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- si z' $\neq$ 0, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$

5. *Module et argument d'un nombre complexe* module_argument_nombre_complexe.ggb

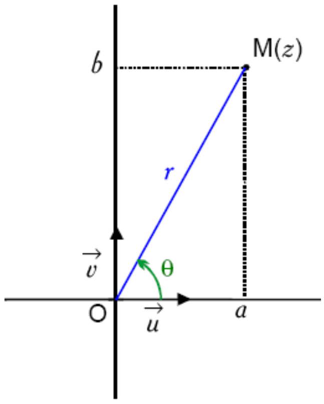
- ***Avant-propos*** (Démo : **module_argument_nombre_complexe-1.ggb** ou **module_argument_nombre_complexe.ggb**)

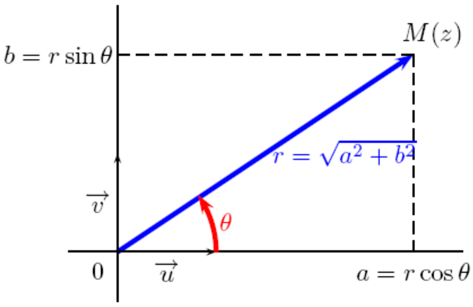
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit M un point de coordonnées ………………….. $(a\ ;\ b)$.

Si M ≠ O, on dit que [r ; θ] est un couple de coordonnées ……………….. de M lorsque :

$$r = OM \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$$





On a alors :

- $r = \sqrt{a^2+b^2}$
- $a = r.cos\theta$ et $b = r.sin\theta$

- Si z est l'affixe du point M, $z = a + ib = r.cos\theta + ir.sin\theta = r.(cos\theta + isin\theta)$

- On utilise parfois l'expression $z = [r\ ;\ \theta\ ]$ (coordonnées polaires).

- ***Module d'un nombre complexe***

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + ib$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **module** d'un nombre complexe z le nombre réel r positif :

$$r = OM = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad \text{On note } r = |z|.$$

Exemples : Calcul du module de nombres complexes : (voir GeoGebra exemple4.ggb)

- $z_1 = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $z_2 = 1 - i \quad \Rightarrow \quad |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $z_3 = -5 - 2i \quad \Rightarrow \quad |z_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$
- $z_4 = -5 \quad \Rightarrow \quad |z_4| = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5$
- $z_5 = 9i \quad \Rightarrow \quad |z_5| = \sqrt{(0)^2 + (9)^2} = \sqrt{0+81} = \sqrt{81} = 9$

Propriétés :

- Soit $\vec{v}$ un vecteur d'affixe z, on a $\|\vec{v}\| = |z|$
- Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a AB $= |z_B - z_A|$

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|-z| = |z|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (voir GeoGebra prop5.ggb)
- $|z z'| = |z| . |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
- $z\overline{z} = |z|^2$ ($z\overline{z}$ est un réel positif) ; si $z' \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

- ***Argument d'un nombre complexe***

Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + ib$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **argument** d'un nombre complexe z tout nombre réel θ tel que :

$\theta = (\vec{u} \,;\, \overrightarrow{OM})$ [2π]. On note $\theta = arg(z)$. θ vérifie : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\Re e(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\Im m(z)}{|z|} \end{cases}$

Remarque :

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas ***unique***.

Si θ est un argument de z, tout argument de z est de la forme $arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $arg(z) = \theta$ [2π]. On dit que l'argument est défini à $\boldsymbol{2k\pi}$ près ou **modulo** 2π ([2π]).

L'unique argument θ appartenant à l'intervalle]-π ; π] s'appelle l'argument **principal**

***Exemples* : (montrer doc angles_caracteristiques.pdf)**

Calcul de l'argument principal de nombres complexes :

- $z_1 = 2 + 2i \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |z_2| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

***Cas particuliers importants* :**

- Si le nombre complexe *z* est un réel :

  - strictement positif, *z* a un argument ***nul*** [2π]

  - strictement négatif, *z* a un argument égal à $\boldsymbol{\pi}$ [2π]

  On peut dire : $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad arg(z) = 0$ ou $arg(z) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad arg(z) = 0\ [\pi]$

- Si le nombre complexe *z* est un imaginaire pur :

  - dont la partie imaginaire est strictement positive, *z* a un argument égal à …….. [2π].

  - dont la partie imaginaire est strictement négative, *z* a un argument égal à …….. [2π]

  On peut dire : $z \in i \quad \Leftrightarrow \quad arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $arg(z) = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

***Propriétés* :**

- Soit $\vec{v}$ un vecteur d'affixe *z*, on a $(\vec{u}\,;\vec{v}) = arg(z)\ [2\pi]$
- Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

***Propriétés* :**

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $arg(z\,z') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$ et $arg(z^n) = n\,arg(z)\ [2\pi]$
- $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$ et $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\,arg(z)\ [2\pi]$
- $arg(\bar{z}) = -\,arg(z)\ [2\pi]$ et $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$

Exemples *:*

A partir de l'exemple précédent :

- $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$
- $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$
- $arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul z peut être écrit sous la forme $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec :

- $r = |z| \in \mathbb{R}_+^*$: module du nombre complexe z
- $\theta = arg(z) \in \mathbb{R}$: l'argument du nombre complexe z

> ***Définition*** *:*
>
> L'écriture $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r et θ respectivement le module et l'argument du nombre complexe z, est appelée **l'écriture trigonométrique** du nombre complexe z.

Remarques *:*

- Pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre z, il faut donc calculer successivement le module et l'argument de z.
- Le nombre complexe $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique. En effet, le nombre complexe 0 a pour module 0 mais n'a pas d'argument.

Exemples *:* Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

- $z_1 = 1 - i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow r = |z_1| = \sqrt{2} \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})] \quad \text{ou} \quad z_1 = [\sqrt{2}\ ; -\frac{\pi}{4}]$$

- $z_2 = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r = |z_2| = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow \quad z_2 = 2\,[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{\pi}{6})]$ ou $z_2 = [2\,;\,\frac{\pi}{6}]$

Remarque *:* Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs. La forme trigonométrique se déduit géométriquement :

- $z_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 3\,[\cos(\pi) + i\,\sin(\pi)]$
- $z_4 = 2i \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

> ***Propriété :***
>
> Si deux complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
>
> $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'.(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :
>
> $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad r.(\cos\theta + i\sin\theta) = r'.(\cos\theta' + i\sin\theta') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\,[2\pi] \end{cases}$

7. Notation exponentielle d'un nombre complexe

- ***Notation***

Pour tout nombre réel θ, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Remarques :

- Il existe une fonction appelée fonction **exponentielle**. : $f(x) = e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

  $e^1 = e$ est un nombre qui a pour valeur approchée 2,718. $e^0 = 1$.
- Ici, $i\theta$ est un nombre complexe : $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

> ***Définition :***
>
> Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul de module $r = |z|$ et d'argument $\theta = arg(z)$.
>
> L'écriture
>
> $z = r.e^{i\theta}$, est appelée **notation exponentielle** du nombre complexe z.

Remarque :

On a $z = r.e^{i\theta} = = r.(\cos\theta + i\sin\theta) = r.\cos\theta + i\,r.\sin\theta = a + ib$

Exemples :

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Notation exponentielle
$z_1 = 1 - i$	$z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})]$	$z_1 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$z_2 = \sqrt{3} + i$	$z_2 = 2\,[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{\pi}{6})]$	$z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exemple :

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de $z = 4\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$:

$\rightarrow z = 4\,[\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})]$

$\rightarrow z = 4\,[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\rightarrow z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ ou $z = [4\,;\,\frac{3\pi}{4}]$

Propriétés *:* Pour tous nombres complexes $z = r.e^{i\theta} = [r\,;\,\theta]$ et $z' = r'.e^{i\theta'} = [r'\,;\,\theta']$, avec θ et $\theta' \in \mathbb{R}$, r et $r' \in \mathbb{R}_+^*$ et tout nombre $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $z\,z' = r.e^{i\theta} \times r'.e^{i\theta'} = rr'.e^{i(\theta+\theta')}$ ou $z\,z' = [rr'\,;\,\theta+\theta']$
- $z^n = (r.e^{i\theta})^n = r^n.e^{in\theta}$ ou $z^n = [r^n\,;\,n\theta]$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r.e^{i\theta}} = \frac{1}{r}\,e^{-i\theta}$ ou $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}\,;\,-\theta]$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r.e^{i\theta}}{r'.e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$ ou $\frac{z}{z'} = [\frac{r}{r'}\,;\,\theta-\theta']$

Exemples :

Soit $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\rightarrow z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z_1 z_2 = [2 \times 2\sqrt{3}\,;\,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}] = [4\sqrt{3}\,;\,\frac{\pi}{2}]$

$\rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ou $\frac{z_2}{z_1} = [\frac{2\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}] = [2\,;\,-\frac{\pi}{6}]$

8. *Équation du second degré à coefficients réels*

Propriété*:* Résoudre dans l'ensemble des ***nombres complexes***, l'équation du second degré à une inconnue $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$, équivaut à déterminer les ***racines*** du trinôme du second degré $a\,z^2 + b\,z + c$. On pose le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

❶ Si **Δ > 0**, alors l'équation du second degré ***deux*** racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

❷ Si **Δ = 0**, alors l'équation du second degré ***une seule*** racine réelle $z_o = -\frac{b}{2a}$

❸ Si **Δ < 0**, alors l'équation du second degré ***deux*** racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemples :

- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 - 2z + 2 = 0$

→ $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2i)^2$

→ Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i = \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 + 6z + 9 = 0$

→ $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

→ Le discriminant étant nul, l'équation admet une seule solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$

- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 + 2z - 3 = 0$

→ $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$

→ Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3 = \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

EXERCICES

Exercice 1: Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.

Calculer et écrire sous la forme algébrique : $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; zz' , z^2

Exercice 2 : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$.

Calculer : $\overline{z}$; $\overline{z'}$; $z + z'$; $\overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z + z'}$; $z.z'$; $\overline{z}.\overline{z'}$; $\overline{zz'}$

Exercice 3

1. Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$

2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $\frac{1}{1+i}$; $\frac{1}{3-i}$; $\frac{1}{i}$

Exercice 4

1. Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2+7i} \quad ; \quad \frac{4}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad \frac{2-i}{5+3i} \quad ; \quad \frac{i}{1-3i} \quad ; \quad \frac{2+i}{i}$$

2. Écrire plus simplement le nombre complexe $\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i} + \frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}$

3. Le nombre complexe $2 - i$ est-il solution de l'équation $(1 - i)z + 1 + 3i = 0$

Exercice 5 : Calculer le module de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = 3 + 4i \quad ; \quad z_2 = 1 - i \quad ; \quad z_3 = 5 - \frac{i}{2} \quad ; \quad z_4 = 3$$

$$z_5 = i - 4 \quad ; \quad z_6 = i \quad ; \quad z_7 = -5 \quad ; \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Exercice 6: Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 3i$ et $b = 5 - i$.

Calculer les distances OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 7: Donner les formes trigonométriques de : $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_4 = i$

Exercice 9 On considère les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Donner la forme exponentielle de Z.

2. Donner les formes algébriques de z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de Z.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 + 3z - 4 = 0 \quad ; \quad 4z^2 - 4z + 1 = 0 \quad ; \quad 2z^2 - 5z + 7 = 0$$

$z + \frac{1}{z} = 1$; $2z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$ où θ est un réel fixé ; $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$